

---

## Mécanique analytique, Corrigé 6

---

*Assistants et tuteurs :*

jeanne.bourgeois@epfl.ch  
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch  
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch  
 filippo.ferrari@epfl.ch  
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch  
 mathias.findrihan@epfl.ch  
 remi.thomas@epfl.ch

### Exercice 1 : Chaînette avec masse ponctuelle

L'objectif de cette exercice est de déterminer la courbe  $y(x)$  qu'adopte une chaînette flexible, inextensible de longueur  $l$ , de masse linéique uniforme  $\rho$ , suspendue entre deux points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  et à laquelle est fixée une masse ponctuelle  $m$  à l'abscisse  $x_*$ . Il s'agit d'une version plus avancée de la "chaînette", vue en cours comme exemple sur les contraintes intégrales. Par la suite, on travaille dans un plan vertical  $(x, y)$  et on décrit la corde par un graphe  $y = y(x)$  satisfaisant  $y(x_A) = y_A$ ,  $y(x_B) = y_B$ .

#### 1. Fonctionnel.

L'énergie potentielle du système est la somme des énergies de pesanteur de ses deux composants, la corde et la masse ponctuelle :

$$V[y] = mgy(x_*) + \int_{x_A}^{x_B} \rho gy(x) \sqrt{1 + y'(x)} dx, \quad (1)$$

où on a utilisé que  $\sqrt{1 + y'(x)} dx = \sqrt{dx^2 + dy(x)^2}$  est la longueur d'un segment de corde entre l'abscisse  $x$  et  $x + dx$ . Le système est par ailleurs soumis à une contrainte de longueur de la corde :

$$\int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)} dx = l. \quad (2)$$

La contrainte et une partie du potentiel à minimiser étant sous forme intégrale, on cherche à mettre tout le potentiel  $V[y]$  sous forme intégrale. Cela est possible en utilisant la fonction dirac  $\delta^1$  :

$$V[y] = \int_{x_A}^{x_B} \left[ mgy(x) \delta(x - x_*) + wy(x) \sqrt{1 + y'(x)} \right] dx. \quad (3)$$

Ce problème se réduit à la minimisation du fonctionnel

$$\mathcal{J}[y] = \int_{x_A}^{x_B} \underbrace{\left[ mgy(x) \delta(x - x_*) + (wy + \lambda_0) \sqrt{1 + y'^2} \right]}_{=: F(x, y, y')} dx. \quad (1)$$

---

1. Fonction dirac  $\delta$  : la "fonction"  $\delta$  est une fonction généralisée sur  $\mathbb{R}$ , définie par la propriété  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$  pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle vaut formellement  $+\infty$  en  $x = 0$  et 0 pour  $x \neq 0$ ; son intégrale est égale à 1,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ . Un changement de variable donne que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$ .

où  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  est un multiplicateur de Lagrange, déterminé a posteriori par le respect de la contrainte.

## 2. Équations d'Euler-Lagrange hors du point chargé.

Sur les intervalles  $[x_A, x_*)$  et  $(x_*, x_B]$ , on a  $\delta(x) = 0$ , si bien que le Lagrangien se réduit ici à

$$F(x, y, y') = (wy + \lambda_0)\sqrt{1 + y'^2}. \quad (4)$$

(on retrouve le lagrangien de la chaînette, cf cours). L'équation d'Euler-Lagrange sur les sous-intervalles  $[x_A, x_*)$  et  $(x_*, x_B]$  s'écrit donc :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{(wy + \lambda_0)y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = w\sqrt{1 + y'^2}. \quad (5)$$

*Note. Pas besoin de développer le terme de gauche ici, cela réduirait fortement la lisibilité de l'équation et rendrait moins évidente sa résolution par la suite.*

Comme sur  $[x_A, x_*)$  et  $(x_*, x_B]$   $F$  n'a pas de dépendance explicite en  $x$ , la fonction Hamiltonienne

$$H = y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = (wy + \lambda_0) \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - (wy + \lambda_0)\sqrt{1 + y'^2} = -\frac{wy + \lambda_0}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (6)$$

est une intégrale première :

$$\frac{wy(x) + \lambda_0}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = -h_i, \quad (7)$$

avec  $i = L$  pour  $x_A \leq x < x_*$  et  $i = R$  pour  $x_* < x \leq x_B$ . Résolvons cette équation sur  $y(x)$  astucieusement. On sépare les variables :

$$y'(x)^2 = \frac{(wy(x) + \lambda_0)^2}{h_i^2} - 1. \quad (8)$$

En posant  $f(x) = y(x) + \frac{\lambda_0}{w}$ , on obtient  $1 = \frac{f(x)^2}{a_i^2} - f'(x)^2$  avec  $a_i = h_i/w$ . On reconnaît alors comme solution  $f(x) = \pm a_i \cosh\left(\frac{x - x_{0i}}{a_i}\right)$ , avec  $x_{0i}$  donné par la condition initiale. L'équation (7) fixe le signe  $+$ . On obtient donc

$$y(x) = C_i + a_i \cosh\left(\frac{x - x_{0i}}{a_i}\right). \quad (9)$$

avec  $C_i = -\frac{\lambda_0}{w}$  et  $a_i = h_i/w$ .

Il nous reste à montrer que la solution physique vérifie  $a_L = a_R$ . Pour cela, nous nous penchons sur la signification physique de l'hamiltonien dans ce système (ce n'est pas l'énergie puisque nous ne travaillons pas en dynamique ici!). Pour cela, nous revenons à l'équation d'Euler-Lagrange, Eq. (5). En posant

$$P_y(x) = \frac{\partial F}{\partial y'} = (wy(x) + \lambda_0) \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}, \quad (10)$$

cette équation nous donne l'identité

$$P_y(x + dx) - P_y(x) - w\sqrt{1 + y'^2}dx = 0. \quad (11)$$

On reconnaît l'équation de conservation des forces suivant l'axe  $y$ , avec  $-w\sqrt{1+y'^2}dx$  le poids du segment de corde entre  $x$  et  $x+dx$ ,  $-P_y(x)$  la tension verticale de la partie gauche et  $P_y(x+dx)$  celle de la partie droite.

Sachant que  $P_y(x)$  correspond à la composante verticale  $T_y$  de la force de tension, on trouve géométriquement que l'amplitude de la tension est  $T = wy(x) + \lambda_0$  et sa composante horizontale  $T_x = \frac{wy + \lambda_0}{\sqrt{1+y'^2}}$ , égale à un signe près à la fonction hamiltonienne ! La conservation de la fonction hamiltonienne sur les sous-intervalles  $[x_A, x_*)$  et  $(x_*, x_B]$  correspond donc à la conservation des forces suivant l'axe  $x$ . On peut de même appliquer cette conservation des forces en  $x_*$  pour obtenir que  $H$  est égale à gauche et à droite de  $x_*$  :  $h_L = h_R = h$ .

En conclusion, sur les sous-intervalles  $[x_A, x_*)$  et  $(x_*, x_B]$ ,

$$y(x) = -\frac{\lambda_0}{w} + a \cosh\left(\frac{x - x_{0i}}{a}\right) \quad (12)$$

Ainsi, de part et d'autre de  $x_*$ , la corde est une chaînette de même paramètre  $a$  mais avec des centres horizontaux potentiellement différents  $x_{0,L}$ ,  $x_{0,R}$  et des décalages verticaux inclus dans  $-\lambda_0/w$ .

### 3. Condition de saut au point $x_*$ .

Au point  $x_*$ , la fonction  $y(x)$  reste continue (la corde est en un seul morceau) mais rien n'impose sa dérivabilité (la corde est parfaitement flexible). Nous allons étudier le comportement de  $y$  en  $x_*$  en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange. Sur  $[x_A, x_B]$ , celle-ci s'écrit

$$\frac{dP_y}{dx} = mg\delta(x - x_*) + w\sqrt{1+y'^2} \quad (13)$$

où le moment conjugué à la coordonnée  $y$ ,  $P_y = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{(wy + \lambda_0)y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ , est identique à précédemment.

Pour déterminer la condition de saut de  $P_y$  au point  $x_*$ , on intègre cette équation sur un petit intervalle  $[x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$  autour de  $x_*$  :

$$P_y(x_* + \varepsilon) - P_y(x_* - \varepsilon) = mg + \int_{x_* - \varepsilon}^{x_* + \varepsilon} w\sqrt{1+y'^2} dx \quad (14)$$

D'après la question précédente, la fonction  $y'(x)$  est bornée sur  $[x_* - \varepsilon, x_*)$  et  $(x_*, x_* + \varepsilon]$  (cf Eq. (12)), si bien que dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , on obtient :

$$P_y(x_*^+) - P_y(x_*^-) = mg \quad (15)$$

où  $P_y(x_*^+)$  désigne la valeur à droite de  $x_*$  et  $P_y(x_*^-)$  sa valeur à gauche.

On retrouve ici que les forces de tension verticale de la droite et de la gauche, respectivement  $P_y(x_*^+)$  et  $-P_y(x_*^-)$ , compense le poids  $mg$ . Nous avons montré à la question précédente que la composante horizontale de la tension est constante de part et d'autre de  $x_*$ .

### 4. Conditions aux bords et continuité.

La solution est donc

$$\boxed{\begin{aligned} y_L(x) &= -\frac{\lambda_0}{w} + a \cosh\left(\frac{x - x_{0,L}}{a}\right), & x \in [x_A, x_*], \\ y_R(x) &= -\frac{\lambda_0}{w} + a \cosh\left(\frac{x - x_{0,R}}{a}\right), & x \in [x_*, x_B]. \end{aligned}} \quad (16)$$

La continuité de la position au nœud,  $y_L(x_*) = y_R(x_*)$ , implique

$$|x_* - x_{0,L}| = |x_* - x_{0,R}|. \quad (17)$$

La condition de saut Eq. (15), sachant que  $y'(x) = \sinh\left(\frac{x-x_{0i}}{a}\right)$  et

$$P_y(x) = \frac{wa \cosh\left(\frac{x-x_{0i}}{a}\right) \sinh\left(\frac{x-x_{0i}}{a}\right)}{\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x-x_{0i}}{a}\right)}} = wa \sinh\left(\frac{x-x_{0i}}{a}\right),$$

donne

$$\sinh\left(\frac{x_* - x_{0,R}}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_* - x_{0,L}}{a}\right) = \frac{mg}{wa}. \quad (18)$$

En combinant avec la condition de continuité au nœud, on en déduit que

$$x_{0,R} = x_* - a \operatorname{Argsh}\left(\frac{mg}{2wa}\right) \quad (19)$$

$$x_{0,L} = x_* + a \operatorname{Argsh}\left(\frac{mg}{2wa}\right) \quad (20)$$

Par ailleurs, les conditions aux bords  $y(x_A) = y_A$  et  $y(x_B) = y_B$  donnent :

$$\cosh\left(\frac{x_A - x_{0,L}}{a}\right) = \frac{y_A + \frac{\lambda_0}{w}}{a} \quad (21)$$

$$\cosh\left(\frac{x_B - x_{0,R}}{a}\right) = \frac{y_B + \frac{\lambda_0}{w}}{a} \quad (22)$$

Enfin, la contrainte de longueur revient à

$$\begin{aligned} \ell &= a \left[ \sinh\left(\frac{x_* - x_{0,L}}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_A - x_{0,L}}{a}\right) \right] + a \left[ \sinh\left(\frac{x_B - x_{0,R}}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_* - x_{0,R}}{a}\right) \right] \\ &= a \left[ \sinh\left(\frac{x_B - x_{0,R}}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_A - x_{0,L}}{a}\right) - \frac{mg}{wa} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Le système d'équations (19), (20), (21) et (23) permet de déterminer  $x_{0,L}$ ,  $x_{0,R}$ ,  $a$  et  $\lambda_0$ .

### 5. Cas symétrique (application).

Dans le cas  $x_A = -L/2$ ,  $x_B = L/2$ ,  $y_A = y_B = 0$  et  $x_* = 0$ , la symétrie du problème par rapport à l'axe ( $x = 0$ ) impose que la fonction  $y(x)$  soit paire :

$$\forall x \geq 0, \quad \cosh\left(\frac{x - x_{0R}}{a}\right) = \cosh\left(\frac{-x - x_{0L}}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x + x_{0L}}{a}\right). \quad (24)$$

On en déduit que  $x_{0L} = -x_{0R} \equiv d$ . La condition de saut devient donc

$$2wa \sinh\left(\frac{d}{a}\right) = mg. \quad (25)$$

Les conditions aux bords donnent chacune

$$\frac{\lambda_0}{w} = a \cosh\left(\frac{L/2 + d}{a}\right) \quad (26)$$

tandis que la contrainte de longueur s'écrit ici

$$\ell = 2a \left[ \sinh\left(\frac{L/2 + d}{a}\right) + \sinh\left(\frac{d}{a}\right) \right]. \quad (27)$$

L'équation (26) permet d'exprimer  $\lambda_0$  en fonction de  $(a, d)$ . Il nous reste à déterminer cette paire de variables. En insérant Eq. (25) dans Eq. (27), on obtient équation scalaire en  $a$  :

$$\ell = 2a \sinh\left(\frac{L}{2a} - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{mg}{2wa}\right)\right) + \frac{mg}{w}. \quad (28)$$

On détermine  $a$  numériquement à partir de cette équation, puis  $d$  avec Eq. (25).

## Exercice 2 : Principe de Fermat dans un milieu d'indice de réfraction variable

**Données du problème.** On considère la longueur optique totale

$$\mathcal{S}[y] = \int_{x_A}^{x_B} F(y, y', x) dx.$$

Pour un chemin optique infinitésimal  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , la longueur optique correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} F(y, y', x) dx &= n(y) \sqrt{dx^2 + dy^2}, \\ &= n(y) \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$F(y, y', x) = n(y) \sqrt{1 + y'^2},$$

où  $n = n(y)$  est l'indice de réfraction stratifié horizontalement. Les extrémités  $(x_A, y_A)$  et  $(x_B, y_B)$  sont fixées.

**Équation d'Euler-Lagrange** L'équation d'Euler-Lagrange pour  $y(x)$  s'écrit

$$\frac{d}{dx} \left( \partial_{y'} F \right) - \partial_y F = 0.$$

Ici et dans la suite on utilisera la notation abrégée pour les dérivées partielles :  $\frac{\partial F}{\partial y} \rightarrow \partial_y F$ , etc. On calcule

$$\partial_{y'} F = \frac{n(y) y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \partial_y F = \frac{dn}{dy} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Donc

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{n y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \frac{dn}{dy} \sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange générale pour un milieu stratifié  $n(y)$ .

**Intégrale première et loi de Snell locale** Puisque  $F$  ne dépend pas explicitement de  $x$ , La fonction Hamiltonienne est une intégrale première :

$$F - y' \partial_{y'} F = C \quad (\text{constante}).$$

Ici,

$$F - y' \partial_{y'} F = n(y) \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{n y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

En introduisant l'angle  $\theta$  du rayon par rapport à l'axe  $x$  via

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

on obtient l'invariant

$$n(y) \cos \theta = C.$$

C'est la forme « locale » de la loi de Snell dans un gradient d'indice.

**Cas  $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$  : intégration explicite** De  $n(y)/\sqrt{1 + y'^2} = C$  on tire

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{n(y)}{C}, \quad y'^2 = \left(\frac{n(y)}{C}\right)^2 - 1.$$

On écrit alors

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\sqrt{(n(y)/C)^2 - 1}}.$$

Pour  $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$ , posons  $A = \frac{n_0}{C}$ . Alors

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{A^2(1 + \alpha y)^2 - 1}}.$$

Intégrale élémentaire (substitution  $u = A(1 + \alpha y)$ ,  $du = A\alpha dy$ ) :

$$x(y) = \frac{1}{A\alpha} \operatorname{arcosh}(A(1 + \alpha y)) + \text{const.}$$

En inversant,

$$A(1 + \alpha y) = \cosh(A\alpha(x - x_0)),$$

soit la solution explicite

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{A} \cosh(A\alpha(x - x_0)) - 1 \right) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{C}{n_0} \cosh\left(\frac{n_0\alpha}{C}(x - x_0)\right) - 1 \right)}. \quad (29)$$

Les constantes  $C$  (ou  $A = n_0/C$ ) et  $x_0$  sont déterminées par les conditions aux bords

$$1 + \alpha y_A = \frac{C}{n_0} \cosh\left(\frac{n_0\alpha}{C}(x_A - x_0)\right), \quad 1 + \alpha y_B = \frac{C}{n_0} \cosh\left(\frac{n_0\alpha}{C}(x_B - x_0)\right),$$

qui forment un système de deux équations non linéaires pour  $(C, x_0)$  (généralement résolu numériquement).

**Limite homogène  $\alpha \rightarrow 0$**  Lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $n(y) \rightarrow n_0$  et la première intégrale donne  $n_0/\sqrt{1 + y'^2} = C$ , donc  $y' = \text{cste}$  : la trajectoire est une droite comme attendu dans un milieu homogène.

### Limite de faible courbure et mirage atmosphérique

**(i) Courbure du rayon pour  $y'(x) \ll 1$ .** De  $n/\sqrt{1 + y'^2} = C$ , on prend le logarithme et on dérive :

$$\frac{d}{dx} (\ln n - \frac{1}{2} \ln(1 + y'^2)) = 0 \implies \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} - \frac{y'y''}{1 + y'^2} = 0.$$

Comme  $\frac{dn}{dx} = \frac{dn}{dy} y'$  et en négligeant  $y'^2$  à l'ordre dominant, on obtient

$$\boxed{y''(x) \approx \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \equiv \kappa} \quad (30)$$

Ainsi, localement,

$$y(x) \approx y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{2} \kappa x^2.$$

Pour un rayon initialement horizontal ( $\theta_0 = 0$ ) sur une portée horizontale  $L$ ,

$$\Delta y \approx \frac{1}{2} \kappa L^2. \quad (31)$$

Un signe  $\kappa < 0$  signifie une courbure vers le bas du rayon ; l'objet observé apparaît alors rehaussé d'une quantité  $|\Delta y|$ .

**(ii) Lien  $n(y)$ –gradient de température.** Pour l'air sec (modèle de réfractivité standard),

$$n - 1 \approx a \frac{P}{T}, \quad a = 77.6 \times 10^{-6},$$

avec  $P$  en hPa,  $T$  en K. Sous hypothèse hydrostatique et gaz parfait,

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g, \quad \rho = \frac{P}{RT}, \quad (R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}),$$

et pour un gradient de température constant  $\Gamma = \frac{dT}{dy}$ , on obtient

$$\frac{dn}{dy} = a \left( \frac{1}{T} \frac{dP}{dy} - \frac{P}{T^2} \frac{dT}{dy} \right) = a \left( \frac{1}{T} \left( -\frac{Pg}{RT} \right) - \frac{P}{T^2} \Gamma \right) = -\frac{aP}{T^2} \left( \frac{g}{R} + \Gamma \right).$$

Donc la courbure est

$$\kappa = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\frac{aP}{nT^2} \left( \frac{g}{R} + \Gamma \right). \quad (32)$$

**(iii) Évaluation numérique explicite ( $L = 1$  km).** Paramètres au niveau de la mer :

$$P = 1013 \text{ hPa}, \quad T = 293 \text{ K}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad R = 287 \text{ J/(kg K)}, \quad n \simeq 1 + a \frac{P}{T}.$$

Numériquement,  $n \simeq 1 + 77.6 \times 10^{-6} \times 1013/293 \simeq 1.0002683$ .

Pour trois gradients de température :

$$\Gamma_{\text{std}} = -6.5 \times 10^{-3} \text{ K/m}, \quad \Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_{\text{inv}} = +1.0 \times 10^{-2} \text{ K/m},$$

on évalue

$$\kappa = -\frac{aP}{nT^2} \left( \frac{g}{R} + \Gamma \right), \quad \Delta y = \frac{1}{2} \kappa L^2, \quad L = 1000 \text{ m}.$$

Cas	$\kappa$ (m <sup>-1</sup> )	$\Delta y$ (m)	$\Delta y$ (cm)
Standard ( $\Gamma = -6.5 \text{ K/km}$ )	$-2.534 \times 10^{-8}$	$-1.267 \times 10^{-2}$	-1.27
Isotherme ( $\Gamma = 0$ )	$-3.129 \times 10^{-8}$	$-1.565 \times 10^{-2}$	-1.56
Inversion ( $\Gamma = +10 \text{ K/km}$ )	$-4.044 \times 10^{-8}$	$-2.022 \times 10^{-2}$	-2.02

Interprétation : le signe négatif ( $\kappa < 0$ ) indique une courbure vers le bas ; l'objet vu à 1 km apparaît donc plus haut que sa hauteur réelle d'une quantité  $|\Delta y|$  (respectivement  $\approx 1.27$  cm, 1.56 cm, 2.02 cm).

**Remarques.**

- La première intégrale  $n \cos \theta = C$  est l'analogie, pour un indice variable, de la conservation de  $n \sin \varphi$  à incidence oblique sur un dioptre plan (loi de Snell).
- Le cas  $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$  illustre que les rayons sont des cosh, exactement comme la chaîne (mais dans un autre contexte physique) : on détermine une fonction continue  $y(x)$  par minimisation d'un unique intégral.
- La limite de faible courbure,  $y'' \approx (1/n)(dn/dy)$ , relie directement la géométrie du rayon à la stratification thermodynamique de l'atmosphère via  $P(y)$  et  $T(y)$ .